Osaka University Knowledge Archive

Title	Banach 空間ノ作用素環ニツイテ
Author(s)	河田, 敬義
Citation	全国紙上数学談話会. 250 p.126-p.146
Issue Date	1943-03-06
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75036
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

1104
~~252~~ Banach空間ノ作用素環ニツイテ

河田 敬義(東京文理大)

Eidelheit ハ(On isomorphisms of rings of linear operators, Studia Math. 9)ニ於テ、二ツノ実Banach空間 X_1 ト X_2 カラ、ソノ上ノ有界線型作用素全体ノ作ル環 $\mathcal{R}(X_1)$ ト $\mathcal{R}(X_2)$ ヲ作ルトキ,若シモ+及×ニ関シテ

$$\mathcal{R}(X_1) \cong \mathcal{R}(X_2)$$

ナラバ,二ツノ Banach空間 X_1 ト X_2 ガ isomorphic ニナルコトヲ証明シタ。

十二月ノ名大ニ於ケル角谷氏ノ講演ニヨッテ、同じコトガX上ノ閉線型部分空間全体ノ作ル束 $\mathcal{L}(X)$ ニ対シテモ成立スルコト,特ニ Hilbert 空間ノ場合ノ $\mathcal{R}(X)$ 及ビ $\mathcal{L}(X)$ ノ特徴附ケニ関スル定理ノ証明モ発表サレタ。角谷氏ノ方法ハ $\mathcal{L}(X)$ ニ関シテ先ヅ定理ヲ証明シ、次

ニ $\mathfrak{R}(X)$ ノ場合ハ問題ヲ $\mathfrak{L}(X)$ ノ場合ニ直シテ間接ニ証明スル。

然シ $\mathfrak{R}(X)$ ノ方ガ $\mathfrak{L}(X)$ ヨリモ多クノ性質ヲモッテキルノデアルカラ，$\mathfrak{R}(X)$ 丈ヲ問題ニスルナラバ、又別ノ証明法モアッテヨイワケデアラウ。

コヽデ，先ヅ Eidelheit ノ定理ヲ（若干整理シテ）紹介シ、次ニ X ガ Hilbert 空間トナルタメノ $\mathfrak{R}(X)$ ノ條件ニ関スル角谷氏ノ定理ノ別証ヲ與ヘ ソレト関聯シテ二三ノ注意ヲ與ヘヨウト思フ。

§1

X ヲ Banach 空間，ソノ元ヲ $x, y, \dots\dots$，ノルムヲ $\|x\|$ トスル。係数ハ実又ハ複素数。

$\mathfrak{R}(X)$ ヲ X ノ上ノ有界線型作用素 A ノ全体：

(1) $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$

トスレバ

(i) $\mathfrak{R}(X)$ ハ環ヲ作リ、（實又ハ複素係数），乗法単位 I ヲ持ツ。

(ii) ノルム (1) ニ関シテ完備デアリ

(iii) $\|AB\| \leqq \|A\| \cdot \|B\|$

即チ（非可換）ノルム環ヲ作ル。

補題 1. (i) $\mathfrak{a}$ ヲ最小左イデヤルトスレバ、$\mathfrak{a}$ ニ對シテ X ノ一ツノ有界線型汎函数 f_0 ガ定マリ，$\mathfrak{a} \ni A$ ト

X ヲ y トガ一義ニ對應シテ

(2) $Ax = f_0(x)\, y$

トアラハサレル。逆ニ f_0 ヲ一ツ定メテ (2) ノ A ノ全体 $\mathfrak{a}$ ヲ作レバ，$\mathfrak{a}$ ハ最小左イデヤルデアル。又ノルム ニ關シテ閉集合トナル。

(ii) $\|A\| = \|f_0\|\,\|y\|$

(iii) f_0 ヲ $\|f_0\| = 1$ ニ一ツ定メレバ (2) ノ $\mathfrak{a} \ni A_y \longleftrightarrow y \in X$ ナル對應ニヨッテ

$$X \cong \mathfrak{a} \quad (\textit{equivalent})$$

デアルノミナラズ $\mathfrak{R}(X)$ ヲ左側作用環トシテ作用同型デアル。

(証) (i) $\mathfrak{a} \ni A_1$ ヲ一ツトリ $A_1 z \neq 0$ ナル z ヲ一ツトリ $f_0(z) \neq 0$ ナル有界線型汎函数 f_1 ヲ一ツトル。

$$A_0 x = f_1(x)\, y_0$$

ニ對シテ $\mathfrak{a} \ni A_0A_1$: $A_0A_1x = f_1(A_1x)\, y_0$，特ニ $A_0A_1 z = f_0(z)\, y_0 \neq 0$

ヨッテ $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{R}A_0A_1 \neq 0$ カラ，$\mathfrak{a}$ ハ最小ナル故 $\mathfrak{a} = \mathfrak{R}A_0A_1$，即チ

$$\mathfrak{a} = (A_y,\ A_y x = f_0(x)\, y,\ y \in X),$$
$$f_0(x) = f_1(A_1 x)$$

トナル。

逆ニカヽル $\mathfrak{a}$ ガ最小左イデヤルトナルコトハ明カ。(ii) ハ (2) カラ

(iii) ハ $BA_y x = f_0(x) By = A_{By} x$ ヨリ 最後ニ $\mathfrak{X} \cong \mathfrak{a}$ カラ $\mathfrak{a}$ ガ $\mathfrak{R}(\mathfrak{X})$中 閉ヂテキルコトガワカル。

定理I. 二ツノ Banach 空間 X, X' ニ對シテ $\mathfrak{R}(X)$ ト $\mathfrak{R}(X')$ ノ間ニ $1 \cdot 1$ ノ對應 $\mathfrak{R}(X) \ni A \leftrightarrow \varphi(A) = A' \in \mathfrak{R}(X')$ ガツイテ

(3) $\varphi(\alpha A + \beta B) = \alpha \varphi(A) + \beta \varphi(B)$

(4) $\varphi(AB) = \varphi(A) \varphi(B)$

(5) $\|A\| = \|\varphi(A)\|$

ナラバ

$$X \cong X' \quad (\textit{equivalent})$$

デ、ソノ對應ヲ $X \ni x \leftrightarrow Vx = x' \in X'$ トスレバ

$$(\|x\| = \|Vx\|)$$

(6) $\varphi(A) = VAV^{-1}$

トナル。

(証) $\mathfrak{R}(X)$ ノ一ツノ最小左イデヤルヲ $\mathfrak{a}$ トスレバ、$\varphi(\mathfrak{a}) = (\varphi(A);\ A \in \mathfrak{a})$ ハ $\mathfrak{R}(X')$ ノ一ツノ最小左イデヤルデアル。故ニ (3), (5) カラ

(7) $X \cong \mathfrak{a} \cong \varphi(\mathfrak{a}) \cong X'$ (*equivalent*)

$\mathfrak{R}(X)$ 及ビ $\mathfrak{R}(X')$ ヲ作用環トシテ作用同型ナル故 (7) ノ對應ヲ

$$X \ni x \leftrightarrow A_x \leftrightarrow A'_{x'} = \varphi(A_x) \leftrightarrow x' \in X'$$

トシ、ソレヲ $X \ni x \leftrightarrow Vx = x' \in X'$ トカケバ,

$\|x\| = \|Vx\|$デ

$$X \ni Bx \longleftrightarrow A_{Bx} = BA_{x} \longleftrightarrow \varphi(BA_x)$$
$$= \varphi(B)\varphi(A_x) = \varphi(B)x' \in X'$$

トナル。之レヲ書キ直セバ $V(Bx) = \varphi(B)Vx$，即チ $\varphi(B) = VBV^{-1}$トナル。q.e.d.

定理2．(Eidelheit) $\mathfrak{R}(X)$ = 何カ他ノノルム $\|A\|^*$が定義サレテ，$\mathfrak{R}(X)$ガコノノルムニ關シテ又ノルム環ニナルナラバ，$\|A\|$ト$\|A\|^*$ハ同値デアル：

$$\|A_n\| \to 0 \longleftrightarrow \|A_n\|^* \to 0$$

(證略) ヲ用ヒルナラバ，定理1デ(5)ノ條件ヲ又カシテモ $\|\varphi(A)\|^* = \|A\|$ ハ $\|\varphi(A)\|$ ト同値ニナルカラ

定理3．(Eidelheit) 定理1デ(5)ヲヌカシテモ V ナレ X ト X′ ノ間ノ isomorphic ナ對應ガツイテ $\varphi(B) = VBV^{-1}$ト表サレル。

系．$\mathfrak{R}(X)$ノ環トシテノ自己同型ハスベテ內部自己同型デアル。

$$\varphi(A) = VAV^{-1}$$

§ 2

コヽデ後ニ用ヒル補題ヲ二ツ擧ゲル。

補題2．(i) $\mathfrak{R}(X)$ノ最小右イデヤル $\mathfrak{J}$ ニ對シテ $X \ni x_0$ガ定マリ，$\mathfrak{J} \ni B$ ト $\bar{X} \ni f$ ($\bar{X}$ ハ X ノ conjugate space) トガ一義ニ對應シテ

(8) $Bx = f(x)x_0$

トアラハサレル。逆ニ $x_0 \in X$ ヲ一ツ定メテ (8) ノ全体ヲ $\mathfrak{L}$ トスレバ、$\mathfrak{L}$ ハ最小右イデヤルデ、ノルムニ關シテ閉集合トナル,

(ii) $\|x_0\| = 1$ トスレバ (8) ノ $\mathfrak{L} \ni B_f \longleftrightarrow f \in \overline{X}$ ナル對應ニヨッテ

$$\overline{X} \cong \mathfrak{L} \,(\text{equivalent})$$

ニナル。

(証) (i) $\mathfrak{L} \ni B_1 \neq 0$ ヲ一ツトリ $B_1 y_1 \neq 0$ ナル $y_1 \in X$ ヲ一ツトリ、任意ニ $f_0 \in \overline{X}$ ヲエランデ作ッタ

$$B_0 x = f_0(x)\, y_1$$

ニ對シテ $\mathfrak{L} \ni B_1 B_0$: $B_1 B_0 x = f_0(x)\, B_1 y_1 \neq 0$. ヨッテ $\mathfrak{L} \supset B_1 B_0 \mathfrak{R} \neq 0$ カラ, $\mathfrak{L}$ ハ最小ナル故 $\mathfrak{L} = B_1 B_0 \mathfrak{R}$,

即チ

$$\mathfrak{L} = (B_f ;\, B_f x = f(x)x_0,\ f \in \overline{X}),\ x_0 = B_1 y_1$$

トナル。以下補題Lト全樣。q.e.d.

補題3. $\mathfrak{N}$ ガ最小左イデヤル, $\mathfrak{N} \ni A$ ナラバ (又ハ $\mathfrak{L}$ ガ最小右イデヤル, $\mathfrak{L} \ni A$ ナラバ)

(9) $A^2 = \lambda A$

(証) $Ax = f_0(x)\, y_0$ カラ $A^2 x = f_0(x)\, f_0(y_0)\, y_0$

$$= f_0(y_0)\, Ax, \quad \text{q.e.d.}$$

次ニ $\mathfrak{R}(X)$ ノ代數的性質ヲ若干擧ゲル。

定理4. (i) $\mathfrak{a}$ が最小左イデヤルナラ $\mathfrak{a}B$ ($B\in\mathfrak{R}(X)$) モ亦最小左イデヤル。逆ニ任意ノ最小左イデヤルハ $\mathfrak{a}B$ ノ形ニ表サレル。右ニツイテモ仝様。

(ii) スベテノ最大左イデヤルニ共通ナ集合ハ 0 丈デアル。右ニツイテモ仝様。

(iii) $\mathfrak{R}(X)$ ノ center ハ λI 丈デアル。

今 $\mathfrak{R}(X)\supset\mathfrak{M}$ ニ對シテ $\mathfrak{M}^r=(B;\ \mathfrak{M}B=0)$, $\mathfrak{M}^l=(A;\ A\mathfrak{M}=0)$ トスル.

$\mathfrak{R}(X)$, ノイデヤル $\mathfrak{J}$ が正規トハ $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}^{rl}$ (又ハ $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}^{lr}$) トスレバ

(iv) $\mathfrak{R}(X)$ ノ正規イデヤルハ $\mathfrak{R}(X)$ 全体又ハ 0 トナル。但シ正規デナイイデヤルナラバ $\mathfrak{R}(X)$ デモ 0 デモナイモノが存在スル。

(証) (i) $\mathfrak{a}=(A;\ Ax=f_0(x)y,\ y\in X)$ トスレバ

$$\mathfrak{a}B=(AB,\ ABx=f_1(x)y,\ y\in X),$$
$$f_1(x)=f_0(Bx)$$

逆ニ $\mathfrak{a}_1=(A;\ Ax=f_1(x)y,\ y\in X)$ トスレバ,
$Bx=f_1(x)x_0$, $f_0(x_0)=1$ トスレバ $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}B$ トナル。
右ニツイテモ仝様。

(ii) $X\ni x_0$ ニ對シテ $\mathfrak{a}=(A,\ Ax_0=0)$, $\mathfrak{R}(X)$ ノ一ツノ最大左イデヤルトナル。何トナレバ $\mathfrak{a}\not\ni C$, $\mathfrak{a}+\mathfrak{R}C=\mathfrak{a}'$ ヲ考ヘレバ $Cx_0=y\neq 0$ ∴ 任意ノ B ニ對シテ $Bx_0=z$ トスレバ $C'Cx_0=C'y=z$ ナル $C'\in\mathfrak{R}(X)$ が存

在スルカラ $(B-C'C)x_0=0$, 即チ $B=C'C+A$, $A\in\mathfrak{A}$ ト表サレル。コレハ $\mathfrak{A}'=\mathfrak{R}(X)$ 即 $\mathfrak{A}$ が最大ナルコト＝牴ナヲナイ。今，E がスベテノ最大左イデヤル＝属スナラバ $Ex_0=0$ がスベテノ $x_0\in X$ デ成立シ $E=0$ トナル。右イデヤルノ場合＝ハ $\overline{X}\ni f_0$ ＝対シテ $\mathfrak{L}_{f_0}=(B;\ f_0(x)Bx=0)$ ハ最大右イデヤルナルコトヲ用ヒレバヨイ。

(iii) $Ax=f_0(x)x_0$ トスレバ $CAx=f_0(x)Cx_0$, $ACx=f_0(Cx)x_0$ $\therefore$ $CA=AC$ ナラバ $Cx_0=\lambda(x_0)x_0$ 故＝ f_0 ヲトメテ x_0 ヲカヘレバ $\lambda(x_0)=\lambda$ トナリ $C=\lambda I$ トナル。

(iv) $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}^{rl}\neq 0$ トスレバ補題２ト同様＝ $\mathfrak{J}\supseteqq\mathfrak{L}$ ナ最小右イデヤルが存在スル。 $\therefore$ $\mathfrak{L}=(B;\ Bx=f(x)x_0,\ f\in\overline{X})$ トスレバ

$$\mathfrak{J}\supseteqq A\mathfrak{L},\ \mathfrak{J}^l\subseteqq(A\mathfrak{L})^l,\ A\mathfrak{L}=(B;\ Bx=f(x)Ax_0),$$
$$(A\mathfrak{L})^l=(C;\ CAx_0=0)$$

トナルカラ A ヲイロイロカヘレバ Ax_0 ハ X 全体ヲ動クカラ $\mathfrak{J}^l=0$ $\therefore$ $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}^{lr}=\mathfrak{R}(X)$ トナル。

正規イデヤルデナケレバ成立シナイコトハ次ノ通リ．

$$Ax=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)x_i,\quad x_i\in X,\quad f_i\in\overline{X}$$

ナル形ノ全体ハイデヤル＝ナル。又コノノルム＝関スル閉包ヲトッテモ $\mathfrak{R}(X)$ 全体＝ハナラナイ。 q.e.d.

$\mathfrak{R}(X)$ ヲソノ代数的性質デ特徴付ケルトイフ問題ハ難

カシサウデアル。有限次元ノAlgebraガ基礎体ノ上ノmatrixalgebra（n次ノmatrix全体）トナルタメニハ、補題3ノ性質ト定理4ノ性質トデ十分デアルガ、一般ノノルム環デハ之等ノ性質ハモッテヰルガ、$\mathcal{R}(X)$トハナラナイ例ガ次ノ§デ簡単ニ見ツケラレテシマフ。

§3

定義　ノルム環$\mathcal{R}$ノ逆同型ノルム環$\mathcal{R}^*$トハ

$\mathcal{R}^* = (A^*;\ A \in \mathcal{R})$,

(10)　$(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$

(11)　$(AB)^* = B^* A^*$

(12)　$\|A^*\| = \|A\|$

デ定義サレルノルム環ヲイフ。

定理5.　Xガ正則（regular）Banach空間デアルナラバ

$$\mathcal{R}(X)^* \cong \mathcal{R}(\overline{X})$$

（証）　$X \ni x$, $\overline{X} \ni f$ ニ對シテ $(x, f) = (f, x) = f(x)$ トカケバ

$$(Ax, f) = (x, A^* f)$$

デ$\mathcal{R}(X) \ni A$ノadjoint $A^* \in \mathcal{R}(\overline{X})$ガ定義サレ，(10), (11), (12)ヲ満足スル。

Xガ正則デアルカラ$X = \overline{\overline{X}}$カラ$\mathcal{R}(\overline{X})$ノ元ハ必ズ$A^*$ノ形ニカケルカラ

$$\mathfrak{R}(X)^* \cong \mathfrak{R}(\overline{X}) \qquad q.e.d.$$

定理6. $\mathfrak{R}(X)^*$ガ如何ナルBanach空間X^*ニ對シテ

$$\mathfrak{R}(X)^* \cong \mathfrak{R}(X^*)$$

トナルナラバ，Xハ正則トナリ，$\overline{X} \cong X^*$トナル。

(証) $\mathfrak{R}(X)$ノ最小右イデヤル$\mathfrak{L}$ヲトレバ，$\mathfrak{R}(X)^* = \mathfrak{R}(X^*) \supseteq \mathfrak{L}^*$ハ最小左イデヤルトナルカラ補題1,2カラ

$$\overline{X} \cong \mathfrak{L} \cong \mathfrak{L}^* \cong X^*$$

トナル。次ニ$\mathfrak{R}(\overline{X}) = \mathfrak{R}(X)^*$ニ關シテ今一度適用スレバ$\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{R}(X)^{**} = \mathfrak{R}(\overline{X})^* = \mathfrak{R}(\overline{\overline{X}})$，即チ定理3カラ$X \cong \overline{\overline{X}}$，$X$ハ正則トナル。$q.e.d.$

之レカラXガ正則デナケレバ$\mathfrak{R}(X)^*$ハ決シテ$\mathfrak{R}(X^*)$ノ形ニカケナイ。トコロガ$\mathfrak{R}(X)^*$ハ補題3及ビ定理4ノ性質ハスベテ満足シテヰルワケデアル。

定理7. $\mathfrak{R}(X)$ノ自己逆同型變換$A \to A^* \in \mathfrak{R}(X)$:

(日) $A^{**} = A$

(月) $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$

(火) $(AB)^* = B^* A^*$

ガ存在スルタメノ必要十分條件ハ

$$X \cong \overline{X} \quad (\textit{isomorphic})$$

ナルコトデアル。$\mathfrak{R}(X)$ノカヽルニツノ變換$A \to A^*$, $A \to A'$ガアレバ

(16) $A^* = TAT^{-1}$

ナル $T \in \mathfrak{R}(X)$ ガ存在スル。逆モ亦眞。

(証) カヽル変換ガ存在シタトスレバ $\mathfrak{R}(\overline{X}) = \mathfrak{R}^* = (\varphi(A);\ A \in \mathfrak{R}(X))$ ト $\mathfrak{R}(X)$ トノ間ノ對應 $\varphi(A) \longleftrightarrow A^*$ デ $\mathfrak{R}(\overline{X}) \cong \mathfrak{R}(X)$，即チ定理3カラ $X \cong \overline{X}$ トナル。

逆ニ $X \cong \overline{X}$ ナラバ $\mathfrak{R}(X) \cong \mathfrak{R}(\overline{X}) = \mathfrak{R}(X)^*$ ナル故ソノ對應デ $A^* \longleftrightarrow \varphi(A)$ トスレバ，A^* ハ (13) (14) (15) ヲ満足スル。(16) ハ定理3ノ系カラ。 q.e.d.

X ガ有限次元ノ場合ニハ A ニ對スル轉置行列ハ (13) (14) (15) ヲ満足スルカラ (16) デ一般ノ形ガモトマルワケデアルガ、一般ノ $X \cong \overline{X}$ ナル Banach 空間ニ対シテハソノ様ナ標準形ガ何ニナルノデアラウカ。

コヽデハ極メテ特別ナ場合ダケヲ考ヘル。

§ 4

$\boxed{\text{定理8 (角谷)}}$ $\mathfrak{R}(X)$ ニ自己逆同型 A^* デ定義サレ

(i) $A^{**} = A$

(ii) $(\alpha A_1 + \beta A_2)^* = \overline{\alpha} A_1^* + \overline{\beta} A_2^*$ ($\overline{\alpha}\ \overline{\beta}$ ハ複素共軛)

(iii) $(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^*$

(iv) $A \neq 0$ ナラ $AA^* \neq 0$

ヲ満足スルナラバ，$X \ni x, y$ ニ對シテ適當ニ内積 (x, y)

ヲ定義スレバ

$$\|x\| \text{ ト } \sqrt{(x,x)}$$

ハ同値ナルノルムヲ與ヘ，且ツ A^* ハ

$$\text{(iii)} \quad (Ax, y) = (x, A^*y)$$

ヲ満足スル様ニ出来ル。

（証）定理2カラ $\|A\| = \|A^*\|$ トシテ差支ヘナイ。（ソウデナケレバ $\|A\| + \|A^*\|$ ヲ新ニノルムトスレバ，初メノノルムト同値ニナルカラ。）

今 $\mathfrak{a}$ ヲ最小左イデヤルトスレバ，補助定理1カラ

$$\mathfrak{a} \ni E_x \longleftrightarrow x \in X, \quad \|E_x\| = \|x\|$$

トナリ、更ニ $\mathfrak{R}(X)$ ヲ作用素トシテ作用同型ニナル。

$\mathfrak{a}^* = (E_x^*;\ E_x \in \mathfrak{a})$ ハ最小右イデヤルトナル。

今 $\mathfrak{a} \ni E_{x_0} \neq 0$ ヲトレバ $E_{x_0}^* E_{x_0} = E_0 \neq 0$ デ（(iv) ヨリ），$E_0 = E_0^* \in \mathfrak{a} \frown \mathfrak{a}^*$ トナル。今 $\|E_0\| = 1$ トスル。

補助定理1カラ

$$\mathfrak{a} \ni E_y = B_y E_0, \quad B \in \mathfrak{R}(X)$$

トアラハセバ，$U = B_y^* E_x \in \mathfrak{a}$ ニ對シテ補助定理3カラ

$$U^2 = \lambda U, \quad \lambda: \text{係数}$$

トナル。又ハ $U^{*2} = \lambda U^*$ デアルカラ $U^* - \lambda I = A$ トオケバ $AU^* = 0$

今 $U \neq 0$ トスレバ $\mathfrak{a} = \mathfrak{R}U$, $\mathfrak{a}^* = U^*\mathfrak{R}$ デアルカラ $\mathfrak{a}^* \ni E_0^* = U^* C$ トアラハサレル。

故ニ

$$E_x^* E_y = E_x^* B E_0 = U^* E_0 = (\lambda I + A) E_0$$
$$= \lambda E_0 + A U^* C = \lambda E_0,$$

即チ

(18) $E_x^* E_y = \lambda E_0$

ナル複素数λが存在スル。($U=0$ ナラ $\lambda=0$ トスレバヨイ)。

コノトキ $\lambda=(y,x)$ トカキ，即チ

(18*) $E_x^* E_y = (y,x) E_0$

デ (y,x) ヲ定義スル。積ノ連續性ト $X \cong \Omega$ (equivalent)

カラ

(イ) (y,x) ハ x 及 y ニツイテ同時ニ連續デアル。

(ロ) $(\alpha y_1 + \beta y_2, x) = \alpha(y_1, x) + \beta(y_2, x)$,

$(y, \alpha x_1 + \beta x_2) = \bar{\alpha}(y, x_1) + \bar{\beta}(y, x_2)$

ナルコトガ假定(ii)カラ得ラレル。

(ハ) $(x,y) = \overline{(y,x)}$

何トナレバ $(E_x^* E_y)^* = E_y^* E_x$，$((y,x)E_0)^* = \overline{(y,x)} E_0$

カラ

(ニ) $(x,x) = 0$ ハ $x=0$ ニ限ル。

何トナレバ假定(iv)カラ $E_x^* E_x \neq 0$

補助定理3カラ $E_0^2 = \lambda E_0$，$E_0 = E_0^*$ カラ假定(iv)カ

ラ $\lambda \neq 0$　　$\therefore E_0^2 = E_0$

トシテ差支ヘナイ。ソウスレバ

(ホ) $(x,x) > 0$　$(x \neq 0)$

何トナレバ (x, x) ハ x ニ關シテ連續デ（(イ)），$x \neq 0$ ナラ 0 ニナラナイ。特ニ $E_0 = E_{x_0}$ ニ對シテハ $(x_0, x_0) = 1$ デアルカラ，$(x, x) > 0$ トナル。

(ヘ) $(Ax, y) = (x, A^* y)$

何トナレバ補助定理1カラ $E_{Ax} = AE_x$ ナル故

$$(Ax, y)E_0 = E_y^* E_{Ax} = E_y^* A E_x = (A^* E_y)^* E_x$$
$$= E_{A^* y}^* E_x = (x, A^* y) E_0$$

トナル。

(ト) $(x, x) \leqq \|x\|^2$

何トナレバ $(x, x) = \|(x\,x)E_0\| = \|E_x^* E_x\|$
$$\leqq \|E_x^*\| \|E_x\| = \|x\|^2$$

(チ) 逆ニ $\|x\|^2 \leqq N(x, x)$ ナル ~~常數~~ N ガ存在スル。

何トナレバ、カヽル N ガナケレバ $(x_n, x_n) = 1,\ \|x_n\| \to \infty$ ナル x_n ガ存在スル。

又ハ $\|E_{x_n}^*\| \to \infty$ デアル。(II) カラ E_x^* ヲ $\mathfrak{E}$ ノ作用素トミレバ補助定理2ニヨッテ汎函數 $f_x(y)$：

$$E_x^* E_y = f_x(y) E_0, \quad \|E_x^*\| = |f_x|$$

ヲ定義スルカラ、Banach P. 80. 定理5ニヨリ

$$\|E_{x_n}^* E_y\| \to \infty$$

ナル E_y ガ存在スル。シカルニ

$$\|E_{x_n}^* E_y\| = |(y, x_n)|$$
$$\leqq \sqrt{(y, y) \cdot (x_n\, x_n)} = \sqrt{(y\, y)}$$

トナリ矛盾ヲ生ジタ。

以上デ定理ノ証明ハオハル。

コノ場合 $\mathfrak{R}(X)$ ハアル Banach 空間ノ上ノ作用素環デアルコトヲ基ニオイテヰル。只アルノルム環トイフ丈デハ更ニ條件ガ必要ナワケデアル。

$\boxed{\text{定理 9}}$ ノルム環 $\mathfrak{R}$ ガ Hilbert 空間 X ノ上ノ有界線型作用素全体トナルタメノ必要十分條件ハ

(i) $\mathfrak{R}$ 中ニ最小左イデヤル $\mathfrak{A}$ ガ存在スル。且 $\mathfrak{A}$ ハノルムニ関シテ $\mathfrak{R}$ ノ閉集合トナル。

(ii) $\mathfrak{A} \ni A$ ハスベテ $A^2 = \lambda A$ ヲ満足スル。

(iii) $\mathfrak{A}$ ハ左イデヤルデアルカラ $\mathfrak{R}$ ヲ左側作用環トスルガ，ソノトキ $\|B\|$ ハ B ヲ $\mathfrak{A}$ ノ作用素トシタトキノノルムニ等シイ。

$$\|B\| = \sup_{\substack{A \in \mathfrak{A} \\ \|A\|=1}} \|BA\|$$

(iv) $\mathfrak{R}$ ハ $\mathfrak{A}$ ノ作用環トシテ strongly-closed:

$$\|B_n A - B_m A\| \to 0 \quad (m, n \to \infty)$$

ガスベテノ $A \in \mathfrak{A}$ ニ対シテ成立スルナラバ

$$\|B_n A - BA\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

ガスベテノ $A \in \mathfrak{A}$ デ成立スル様ナ $B \in \mathfrak{R}$ ガ存在スル。

(v) $\mathfrak{R} \ni A$ ニ對シテ $A^* \in \mathfrak{R}$ ガ存在シテ定理8ノ(i)—(iv)ヲ満足シ，

特ニ $\|A\| = \|A^*\|$

トナスコトデアル。

(注意) (iii) ハ次ノ條件 (iii') ヲ含ンデヰル。

(iii') $B\mathfrak{a}=0$ ナラバ $B=0$

特ニ $\mathfrak{R}$ ガ有限次元ノ場合ニ基礎体ノ上ノ Matrix 全体ノ環トナルタメノ必要十分條件ハ (ii) ト (iii') デアル。

何トナレバ (iii') カラ先ヅ Radikal ガ存在セズ、次ニ simple トナリ最後ニ (ii) カラ基礎体ノ上ノ Matrix 全体ノ環ニナル。

(証明) 最小左イデヤル $\mathfrak{a}$ ハ閉ヂテヰルカラ、一ツノ Banach 空間トナル。$\mathfrak{R}$ ヲ $\mathfrak{a}$ ノ上ノ作用素環トミレバ、定理 6 ト全ク同ジ様ニ証明ガススメラレテ、$\mathfrak{R}$ ハ Hilbert 空間 X ノ上ノ作用素環トナル。$\mathfrak{R}\subset\mathfrak{R}(X)$ ニ於テ $\mathfrak{R}\ni I$. 且ツ strongly closed デアルカラ $\mathfrak{R}$ ノ $\mathfrak{R}(X)$ ノ中ノ commutator ガ λI 丈デアルコトヲイヘバ $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}(X)$ トナル。

$A\in\mathfrak{R}(X)$, $X\cong\mathfrak{a}$ ヲ $\mathfrak{R}$ ノ commutator トスレバ $E_x^*\in\mathfrak{R}$ ナル故

$$\begin{cases} E_x^* E_y = (y,x)E_0 \\ A E_x^* E_y = (y,x) A E_0 \\ E_x^* A E_y = (Ay,x) E_0 \end{cases}$$

即チ $AE_0=\lambda E_0$, $\lambda(y,x)=(Ay,x)$ ガスベテノ $y\in X$ デ成立シナクテハナラナイ。故ニ $A=\lambda I$ トナル。

q.e.d.

§5

$X \cong \overline{X}$デアッテモXハHilbert空間トハ限ラナイノデ，今Xヲ任意ノ正則ナ実Banach空間トシテ

$$X_0 = X + \overline{X}, \quad X_0 \ni x_0 = x + f, \quad x \in X, \ f \in \overline{X},$$
$$\|x_0\| = \|x\| + \|f\|$$

トスレバ，ソノ共軛空間$\overline{X}_0$ハ

$$\overline{X}_0 = \overline{X} + X, \quad X_0 \ni \overline{x}_0 = f + x, \ \|\overline{x}_0\| = \|f\| + \|x\|$$

トisomorphicニナル。明カニ$X_0 \cong \overline{X}_0$デアル。

コノ場合ニ実際ニadjointヲ作リ(18)式ノ入ヲ求メテミヨウ。

今$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ヲ

$$(19) \quad \mathfrak{A} = (A;\ Ax \in X,\ x \in X),$$
$$\mathfrak{B} = (B;\ Bx = f \in \overline{X},\ x \in X)$$

$\mathfrak{C} = (C;\ Cf = x \in X,\ f \in \overline{X})$, $\mathfrak{D} = (D;\ Df = g \in \overline{X},\ f \in X)$ナル有界線型作用素ノ全体トシ，夫々ノadjointヲ$(x, f) = (f, x) = f(x)$ナル記号ニヨリ

$$(20) \begin{cases} A^*:\ (Ax, f) = (x, A^*f),\ A^* \in \mathfrak{D} \\ B^*:\ (Bx, y) = (x, B^*y),\ B^* \in \mathfrak{B} \\ C^*:\ (Cf, g) = (f, C^*g),\ C^* \in \mathfrak{C} \\ D^*:\ (Df, x) = (f, D^*x),\ D^* \in \mathfrak{A} \end{cases}$$

デ表ハセバ，$\mathfrak{R}(X_0) \ni H$ハ

$$(21) \quad H\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + Cf \\ Bx + Df \end{pmatrix}$$

adjoint $H^* \in \mathfrak{R}(X_0)$ ハ

$$H = \begin{pmatrix} D^* & C^* \\ B^* & A^* \end{pmatrix}$$

定理8ハ(i) (ii) (iii) ヲ満スガ，(iv) ハ必ズシモ満シテイナイ。例ヘバ

$$H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix} \quad HH^* = H^*H = 0$$

デアル。

今 X_0 ヲ $y_0 + g_0$ ヲ一ツキメレバ X_0 ノ最小正規左イデヤル $\mathfrak{M}_0$ トシテ

$$H_{(z_0, h_0)}(x+f) = \bigl(g_0(x) + f(y_0)\bigr)(z_0 + h_0),$$
$$z_0 \in X, \; h_0 \in \overline{X}$$

ノ全体ヲトレバ

$$H_{(z_0 h_0)} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}, \quad Ax = g_0(x) z_0, \quad Bx = g_0(x) h_0,$$

$$Cf = f(y_0) z_0, \quad Df = f(y_0) h_0$$

トナリ，ソノ adjoint ハ

$$H^*_{(z_0 h_0)} = \begin{pmatrix} D^* & C^* \\ B^* & A^* \end{pmatrix}, \quad D^* x = h_0(x) y_0,$$

$$B^* x = h_0(x) g_0, \quad C^* f = f(z_0) y_0, \quad A^* f = f(z_0) g_0$$

ニナル。故ニ (11) 式ニ於テ

$$H^*_{(\bar{z}_0 \bar{h}_0)} H'_{(z_0 h_0)} \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{D}^* A + \bar{C}^* B, & \bar{D}^* C + \bar{C}^* D \\ \bar{B}^* A + \bar{A}^* B, & \bar{B}^* C + \bar{A}^* D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix}$$

$$=\left(\bar{h}_0(z_0)+h_0(\bar{z}_0)\right)H_0,$$

$$H_0^*=H_0=\begin{pmatrix}A_0 & C_0\\ B_0 & D_0\end{pmatrix},\quad A_0x=g_0(x)y_0,\ B_0x=g_0(x)g_0,$$

$$C_0f=f(y_0)y_0,\quad D_0f=f(y_0)g_0$$

トナル。故ニ(18*)中ニ於テ

$$((x+f),(y+g))=f(y)+g(x),$$

$$((x+f),(x+f))=2f(x)$$

トナル。コレハ定理8ノ証明中(イ)―(チ)ノ性質中(ニ)(ホ)(チ)ハ満足サレナイガ，他ハ満足サレル。

今度ハ $\mathcal{R}(X)$ ノ自己逆同型 $A\to A^*$ ガ今喋ヘタ型ニナツテキル條件ヲ考ヘテ見ル。ソノタメニ

補題4. $\mathcal{R}(X)$ ノ乗法単位 I ガ

$$I=I_1+I_2,\quad I_1I_2=I_2I_1=0$$

ト分解サレルナラバ，X ハ同値ナノルムヲツケカヘレバ

$$X=X_1+X_2,\quad x=x_1+x_2,\quad \|x\|=\|x_1\|+\|x_2\|$$

トニツノ Banach 空間ノ直和ニ分解サレル。

(証) $I_1=I_1^2+I_1I_2=I_1^2$，同様ニ $I_2=I_2^2$ トナル。

$$M_1=(x;\ I_1x=x,\ x\in X),$$

$$M_2=(x;\ I_2x=x,\ x\in X)$$

トスレバ

$$M_1\frown M_2=0,\quad X=M_1+M_2$$

トナリ，M_1，M_2 ハ X ノ閉線型部分空間トナル。X∋$x=x_1+x_2$，$x_i\in M_i$ ナル直和分解ニ對シテ $\|x\|'=\|x_1\|+\|x_2\|$

トスレバ，$\|x\|' \geqq \|x\|$ デ，X ハ両方ノノルムニ関シテ Banach 空間ヲ作ルカラ $\|x\|$ ト $\|x\|'$ ハ同値ナノルムヲ與ヘル。 q.e.d.

定理10. $\mathfrak{R}(X)$ ヲ A ニ対シテ (13), (14), (15) ヲ満足スル $A^* \in \mathfrak{R}(X)$ ガ對應シ，更ニ乗法単位 I ガ

$$(23) \qquad I = I_0 + I_0^*, \quad I_0 I_0^* = I_0^* I_0$$

ト分解サレルナラバ

$$X = X_0 + \overline{X}_0, \quad \overline{\overline{X}}_0 = X_0$$

ト補題4ノ意味ヲ直和分解サレ，(21)式ノ $H \in \mathfrak{R}(X)$ ニ對スル H^* ガ (20), (22)式ノ形デ與ヘラレル。

(証) $M_1 = (x;\ I_0 x = x,\ x \in X)$，$M_2 = (x;\ I_0^* x = x,\ x \in X)$ トスレバ補題4カラ $X = M_1 + M_2$ ト直和分解サレル。今

$$(24) \begin{cases} \mathfrak{R} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d}, \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(X), \\ \mathfrak{a} = I_0 \mathfrak{R} I_0, \quad \mathfrak{b} = I_0^* \mathfrak{R} I_0, \quad \mathfrak{c} = I_0 \mathfrak{R} I_0^*, \\ \qquad \mathfrak{d} = I_0^* \mathfrak{R} I_0^* \end{cases}$$

トオケバ

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{d} = \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{b}\mathfrak{d} = \mathfrak{c}\mathfrak{a} = \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{d}\mathfrak{a} = \mathfrak{d}\mathfrak{c} = 0$$

$$\begin{cases} \mathfrak{a} M_2 = 0, & \mathfrak{a} M_1 = M_1 \\ \mathfrak{b} M_2 = 0, & \mathfrak{b} M_1 = M_2 \\ \mathfrak{c} M_1 = 0, & \mathfrak{c} M_2 = M_1 \\ \mathfrak{d} M_1 = 0, & \mathfrak{d} M_2 = M_2 \end{cases}$$

逆ニ $AM_2=0$, $AM_1\subseteqq M_1$ ナラバ $A\in\mathfrak{A}$ 等。

故ニ $\mathfrak{A}=\mathfrak{R}(M_1)$, $\mathfrak{B}=\mathfrak{R}(M_2)$ トナル。シカルニ $\mathfrak{A}^*=\mathfrak{B}$ ナル故, 定理6カラ

$$\overline{M}_1\cong M_2,\quad \overline{M}_2\cong M_1$$

トナル。且ツ $A\longleftrightarrow A^*$ ハ互ニ *adjoint* ニナル。即 $X_0=M_1+M_2$ ナル分解ニ應ジテ

$$H=\begin{pmatrix} A & C \\ B & D\end{pmatrix},\quad A=I_0HI_0,\quad B=I_0^*HI_0,$$

$$C=I_0HI_0^*,\quad D=I_0^*HI_0^*$$

ト表ハセバ

$$H^*=\begin{pmatrix} D^* & C^* \\ B^* & A^*\end{pmatrix},\quad D^*=I_0H^*I,\quad B^*=I_0^*HI_0,$$

$$C^*=I_0HI_0^*,\quad D^*=I_0^*HI_0^*$$

トナリ, A^*, B^*, C^*, D^* ガ夫々 (20) ヲ満足スルコトハ定理8(ヘ)ト全ク同様デアル。 q.e.d.

$X\cong\overline{X}$ トナル X ハ一体ドンナモノガアルノデアラウカ。有限次元ノ場合ヲ除イテハ、恐ラク $X=X_0+\overline{X}_0$ ノ形ニアラハサレルノデハナイデアラウカ。或ハ $\mathfrak{R}(X)$ ノ言デイヘバ (13) (14) (15) ヲ満足スル A^* ハ適當ナ T ヲトレバ, TA^*T^{-1} ニ対シテ (23) ガ常ニ成立スルノデハナイデアラウカ。又 $X=X_0+\overline{X}_0=X_1+\overline{X}_1$ ト分解サレタトキ $X_0\cong X_1$ 又ハ $X_0\cong\overline{X}_1$ トナルノデアラウカ。 (18, 1, 30)